**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»**

**Отчет по лабораторной работе №3**

по дисциплине «Прикладная математика»

Авторы: Власов Роман, Высоцкая Валерия, Тихомиров Дмитрий

Факультет: Информационных технологий и программирования

Группа: М32021



**Санкт-Петербург, 2022**

**Описание используемых методов и понятий**

**Разреженно-строчный формат хранения матрицы**

Используется для эффективного хранения разреженных матриц.

Представляем исходную матрицу в виде трех массивов

Массив значений, в котором хранятся подряд все ненулевые значения

Массив индексов столбцов, в котором хранятся номера столбцов, соответствующих элементов из массива значений

Массив индексации строк, где хранятся количество ненулевых элементов в строках с первой до i — 1 включительно

**LU-разложение**

Представление матрицы в виде произведения двух матриц. Для матрицы А = LU, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица.

Разложение существует, только когда матрица А обратима (имеет обратную матрицу) и все ведущие (угловые) главные миноры матрица А невырождены.

Алгоритм нахождения LU-разложения

Для i от 1 до n:

Для j от 1 до n:

Если i <= j:

Если i > j:

**Метод решения СЛАУ Гаусса с использованием LU-разложения**

СЛАУ Ах=b можно решить простым путем, если известно LU-разложение матрицы А.

На первом этапе решается уравнение Lz=b, где z – промежуточное решение. L – нижняя треугольная матрица, поэтому решение можно записать в следующем виде:

Далее решаем СЛАУ Ux = z, здесь U – верхняя треугольная матрица, поэтому тоже можно легко найти решение:

**Нахождение обратной матрицы при помощи LU-разложения**

Для нахождения каждого вектора обратной матрицы решаем СЛАУ, где приравниваем заданную матрицу соответствующему вектору из единичной матрицы. Например, для второго вектора обратной матрицы 3 на 3:

Из полученных векторов получаем обратную матрицу.

**Итерационный метод решения Якоби**

Имеем СЛАУ Аx = b

Процедура нахождения решения имеет следующий вид

*, где d – вектор диагональных элементов матрицы А*

Критерий остановки

| xn+1 - xn | < ε

**Условие сходимости:**

**Необходимое и достаточное условие:**

Все собственные числа эквивалентной матрицы должны быть по модулю меньше единицы

**Необходимое условие для метода простых итераций:**

Норма эквивалентной матрицы должна быть меньше единицы

**Необходимое условие для метода Якоби:**

Исходная матрица должна обладать диагональным преобладанием.

**Результаты тестирования**

**Зависимость точности решения от числа обусловленности матрицы**

**Матрицы с диагональным преобладанием**

Число итераций: 2

|  |  |
| --- | --- |
| Число обусловленности | Погрешность метода Якоби (максимальная разница между одной из координат в последних двух итерациях) |
| 10689.2 | 37061557.2 |
| 3512 | 37.94 |
| 287 | 0.44 |
| 85 | 3e-05 |

**Матрицы Гильберта**

Метод Якоби на них расходится, так как они не удовлетворяют необходимому условию сходимости метода простых итераций

**Сравнение прямого и итерационного методов по времени исполнения**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| N | Прямой | Итерационный |
| 10 | 0.003327 | 0.000418 |
| 50 | 0.065255 | 0.001355 |
| 100 | 0.254790 | 0.002904 |
| 500 | 6.269468 | 0.012712 |
| 1000 | 25.430548 | 0.026203 |

**Выводы:**

По таблице видно, что время решения прямым методом сильно зависит от размера матрицы, чего нельзя сказать о итерационном. В то же время прямой метод гарантирует точной решение для матриц без нулевых элементов, итерационный же просто сходится только на матрицах с диагональным преобладанием и к тому же дает неточное решение, в зависимости от числа обусловленности матрицы.

Таким образом, итерационные методы стоит применять только в случаях больших матриц, в остальных лучше использовать прямой.

**Ссылка на исходный код:**

<https://github.com/appmath-2022/labs/tree/main/Lab3>